UNIVERSIDADE CATÓLICA DE PELOTAS
Escola de Informática
Programa de Pós-Graduação em Informática
Mestrado em Ciência da Computação

Algoritmos de Fluxo Máximo

Estrutura de Dados

Rodrigo Santos de Souza

Fluxo em Redes

É a transferência de algum tipo de recurso quantificável e sujeito a restrições de equilíbrio, de um local(nó origem) para outro(nó sorvedor) através da rede.

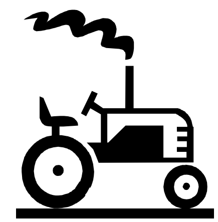
Fluxo em Redes

- Um fluxo em rede G=(V,E) é um **grafo orientado** em que cada aresta $(u,v) \in E$ e tem uma capacidade não negativa $c(u,v) \geq 0$.

- E=conjunto de arestas
- V=conjunto de vértices
- u=origem e v=soredoro(destino)

- Cada vértice reside em algum caminho de u a v

Exemplos



➢Líquido fluindo por uma rede de tubos, como a rede de abastecimento de água ou a rede de esgoto

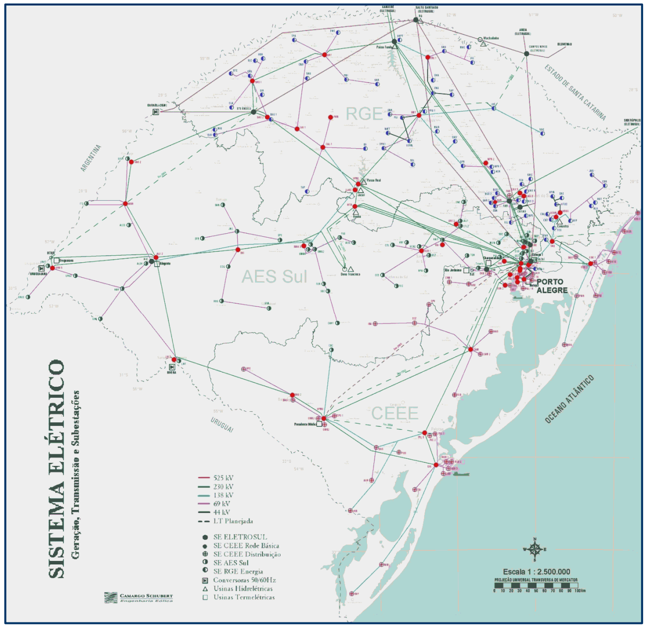
➢Peças se deslocando por linhas de montagem

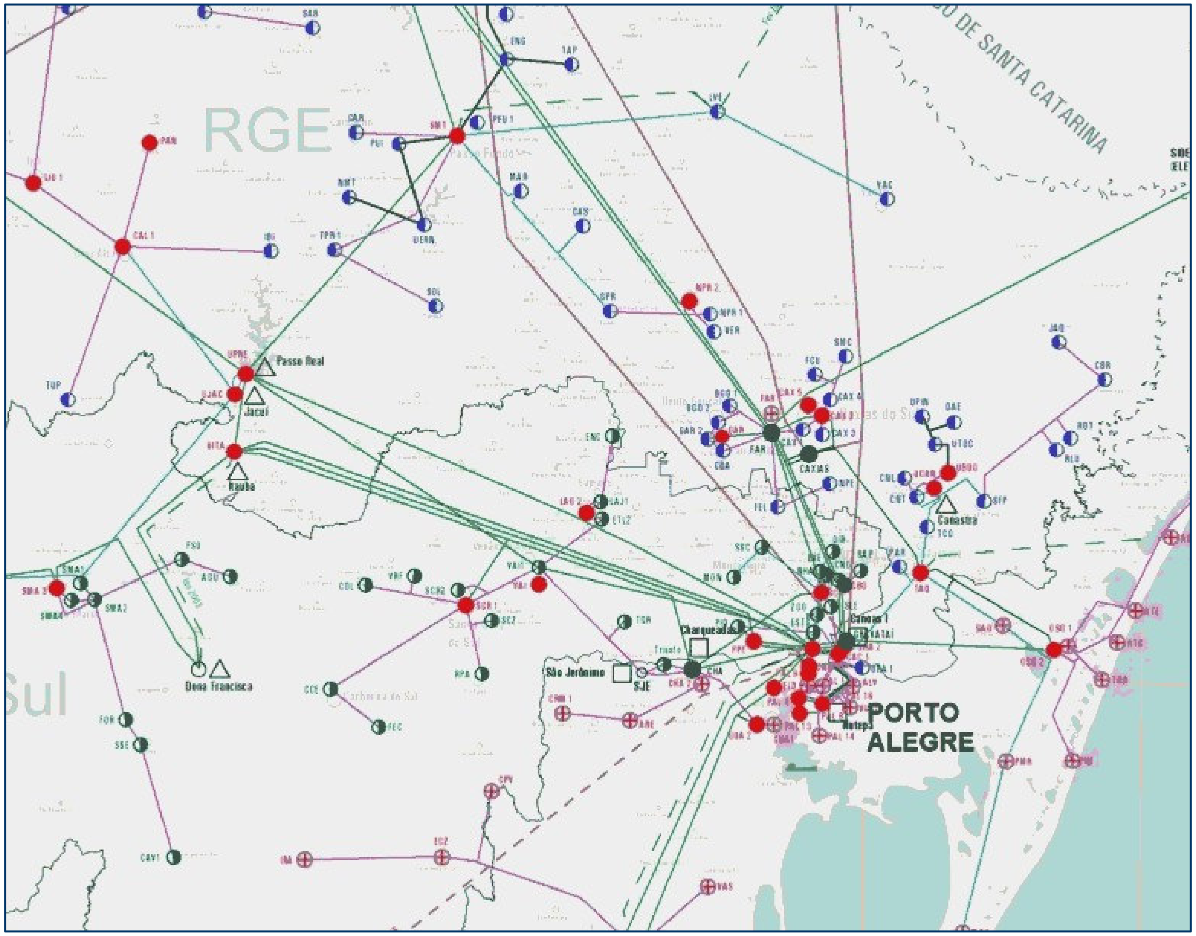
➢Voz, imagem ou dados em redes de comunicação

➢Sistemas Elétricos de Transmissão

Exemplos

Sistema Elétrico do
Rio Grande do Sul





Propriedades de Fluxo

- Restrição de capacidade

$$\forall u, v \in V; f(u,v) \le c(u,v)$$

- Anti-simetria oblíqua

$$\forall u, v \in V; f(u,v) = -f(v,u)$$

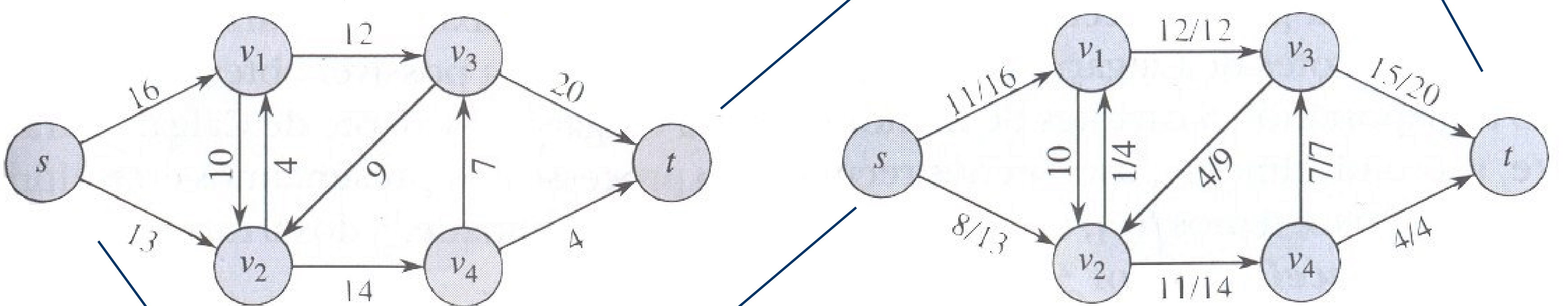
- Conservação de Fluxo

$$\forall u \in V - \{s,t\} \qquad \sum_{v \in V} f(u,v) = 0$$

Exemplo

capacidade c(v1,v2)

sorvedouro



origem

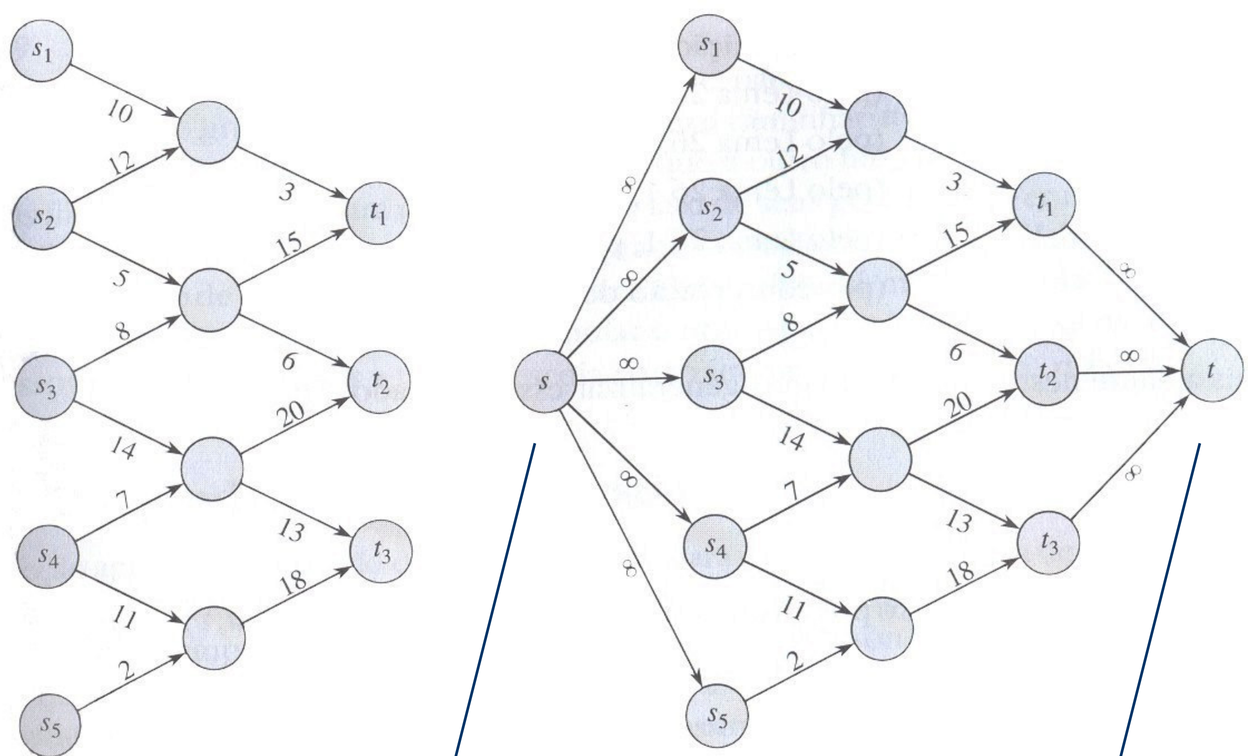
fluxo/capacidade

Fluxo em Redes

Redes de fluxo com múltiplas fontes e/ou destinos

- Definir super-fonte que liga a todas as fontes;
- Definir super-destino ao qual todos os destinos se ligam;
- Capacidades infinitas entre super-fonte e fontes, e entre destinos e super-destino.

Exemplo



Super-origem

Super-depósito

Fluxo Máximo

- Número máximo de unidades de fluxo que é possível enviar através da rede desde o nó origem até o nó destino sem violar quaisquer restrições de capacidade.

Considera-se que há conservação de fluxo, ou seja, que o fluxo que parte da origem chega totalmente ao destino não havendo, portanto perdas no caminho.

Aplicações

Considere a seguinte situação modelada por um grafo:

– Cada arco representa uma rua.

– O peso de cada aresta indica o maior fluxo possível ao longo da rua (veículos/hora).

• Qual o maior número possível de veículos que pode viajar do local ***u*** até o local ***v*** em uma hora?

Aplicações

Outra situação:

- Imagine que uma empresa deseja transportar a maior quantidade possível de produtos de uma cidade para outra, através da rede rodoviária.
- A restrição do transporte pode ser o número disponível de caminhões da empresa para fazer cada trajeto entre cada cidade intermediária.
- Então como determinar o fluxo máximo possível entre as duas cidades?

Problema do Fluxo Máximo

Para resolver o problema do fluxo máximo foram propostos alguns algoritmos:

- *Método* de **Ford-Fulkerson**, que foi o primeiro algoritmo proposto;
- Algoritmo de Edmonds-Karp, que é o próprio Ford-Fulkerson com busca em largura para definir o caminho aumentante;
- Método de push-relabel, que é mais rápido que os anteriores;
- Goldberg e Tarjan propuseram um novo método conhecido como *método do pré-fluxo*.

Método de Ford-Fulkerson

Depende de três idéias importantes:

- **Redes residuais:** Consiste em arestas que podem admitir mais fluxo.
- **Caminhos em ampliação**: Consiste de um caminho simples desde a origem até a rede residual.
- **Cortes:** Separam o grafo em duas partes, uma com o nodo de origem e outra com o sorvedouro.

Redes residuais - conceito

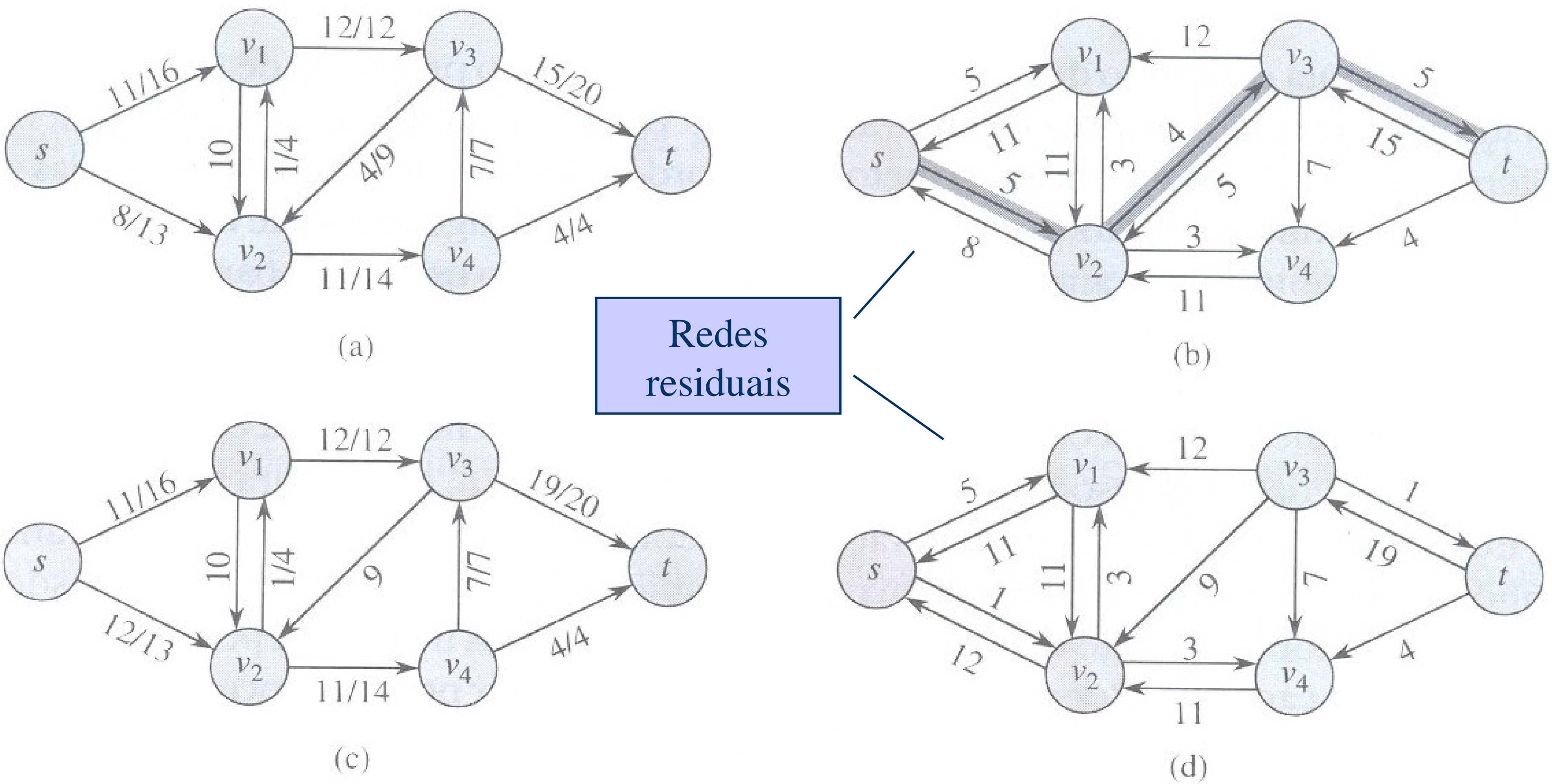
- Considerando-se uma rede *G* e um fluxo *f*, a rede residual G_f consiste em arestas que podem admitir mais fluxo.

- A *capacidade residual* c_f é a quantidade de fluxo adicional que pode passar por (u, v) sem exceder a capacidade $c(u, v)$:

$$c_f\,(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

Obs: *u* e *v* são dois vértices quaisquer da rede G

Exemplo



s
v1
v2
v3
v4
t
11/16
8/13
12/12
10
1/4
4/9
7/7
15/20
11/14
4/4
(a)
5
11
8
12
11
3
4
5
7
5
15
3
11
4
(b)
Redes residuais
11/16
12/13
12/12
10
1/4
9
7/7
19/20
11/14
4/4
(c)
5
11
1
12
12
11
3
9
7
1
19
3
11
4
(d)

Caminhos aumentantes

- São caminhos simples da origem *(s)* ao sorvedor *(t)* através da rede residual Gf.

- A capacidade residual de um caminho aumentante *p*, corresponde à menor dentre as capacidades residuais das arestas que fazem parte de *p*.

$$c_f = min\{c_f(u,v) | \ (u,v) \text{ está em } p\}$$

Algoritmo de Ford-Fulkerson

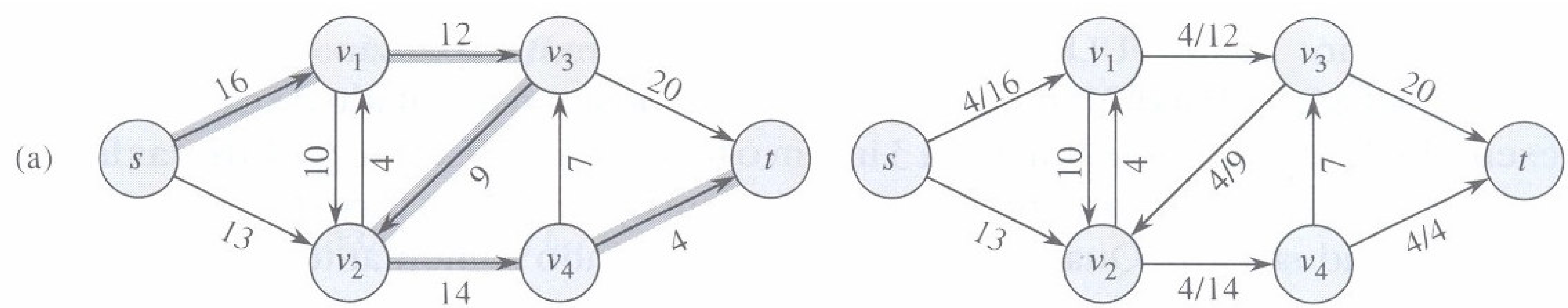
Os passos de cada iteração do algoritmo podem ser resumidos do seguinte modo:

- *1º* - Escolhe-se um caminho qualquer desde a origem até ao sorvedor cujas arestas capacidade positiva (>0)
- *2º* - Procurar nesse caminho o arco orientado com menor capacidade *c*
- *3º* - Diminuir de *c* a capacidade de fluxo em cada aresta do caminho no sentido direto e aumentar de *c* a capacidade das arestas no sentido inverso
- Regressar ao 1º passo. Se já não existir nenhum caminho em que todas as arestas tenham capacidade positiva, então o fluxo máximo já está determinado.

Algoritmo de Ford-Fulkerson

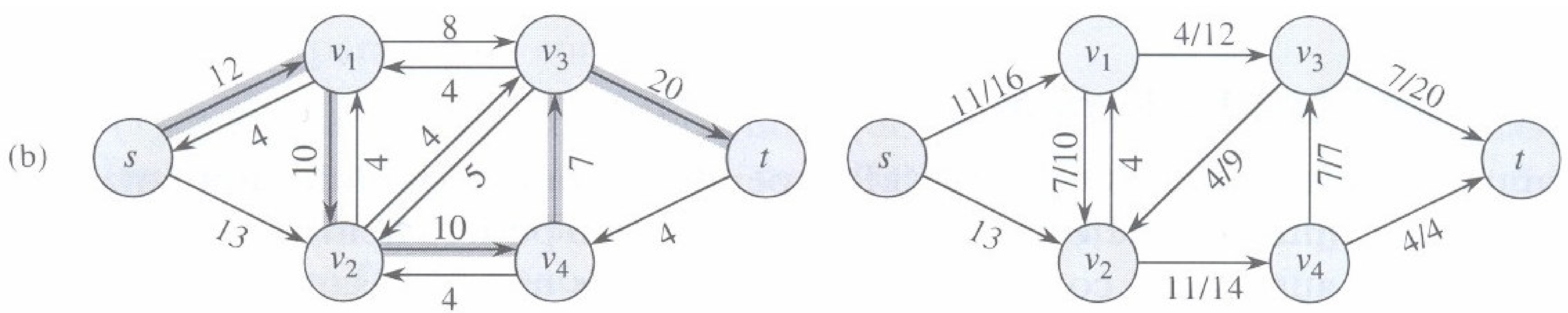
```
FORD-FULKERSON(G,s,t)
para cada aresta (u,v) ← E[G]
    faça    f[u,v] ← 0
            f[v,u] ← 0
enquanto existir um caminho p de s até t na rede residual G_f
    faça    c_f ← min{c_f(u,v):(u,v) está em p}
        para cada aresta em (u,v) em p
            faça    f[u,v] ← f[u,v]+ c_f(p)
                    f[v,u] ← -f[u,v]
```

Algoritmo de Ford-Fulkerson



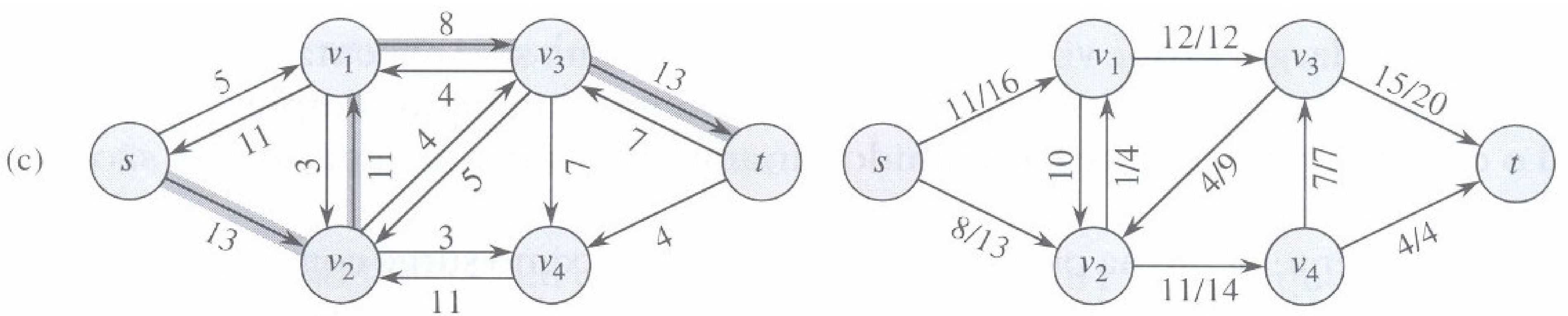
Menor capacidade=4

Algoritmo de Ford-Fulkerson



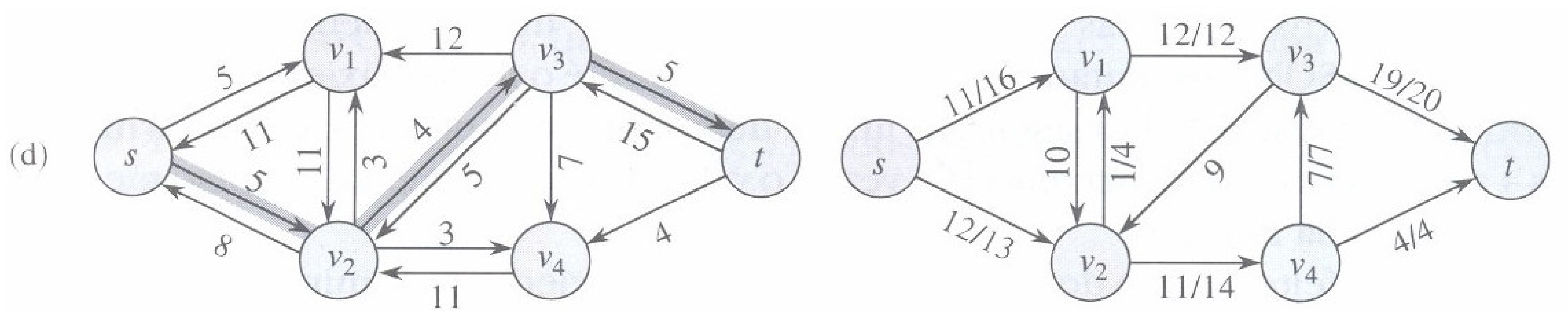
Menor capacidade=7

Algoritmo de Ford-Fulkerson



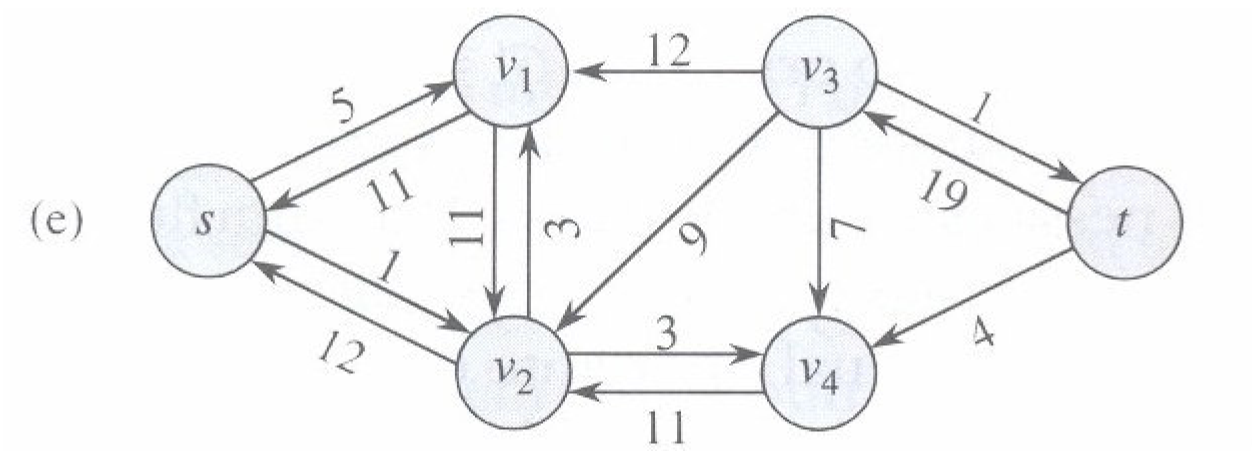
Menor capacidade=8

Algoritmo de Ford-Fulkerson



Menor capacidade=4

Algoritmo de Ford-Fulkerson



➢Não existem mais nenhum caminho possível que vá da origem até o sorvedoro

➢O Fluxo máximo é 23 (melhor visto no slide anterior)

Cortes de fluxo - conceito

Um *corte(S,T)* de um fluxo em rede G = (V,E) é uma separação do conjunto de vértices V em dois conjuntos S e T = V - S, de forma que a origem s ∈ S e o sorvedoro t ∈ T.

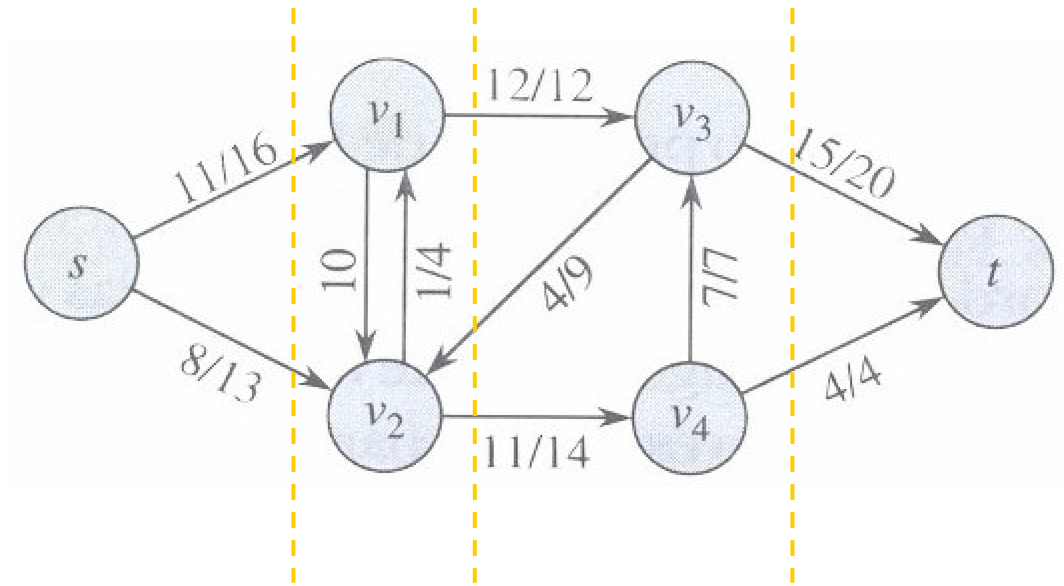
Se f é um fluxo, então o *fluxo líquido* pelo corte (S,T) é definido como f(S,T). A *capacidade* do corte (S,T) é c(S,T).

Um *corte mínimo* de uma em rede é um corte cuja capacidade é mínima dentre todos os cortes da rede.

Teorema do Fluxo Máximo

"Para toda a rede com uma só origem e um só destino o fluxo máximo é igual ao valor mínimo de corte entre todos os cortes possíveis da rede."

Cortes de fluxo - exemplo

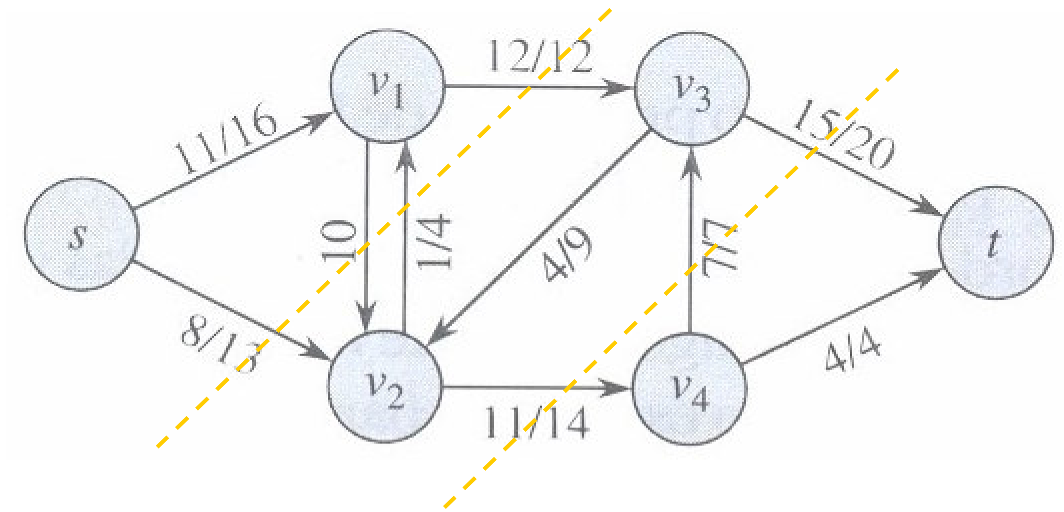


c=29
F=19

c=26
f=19

c=24
f=19

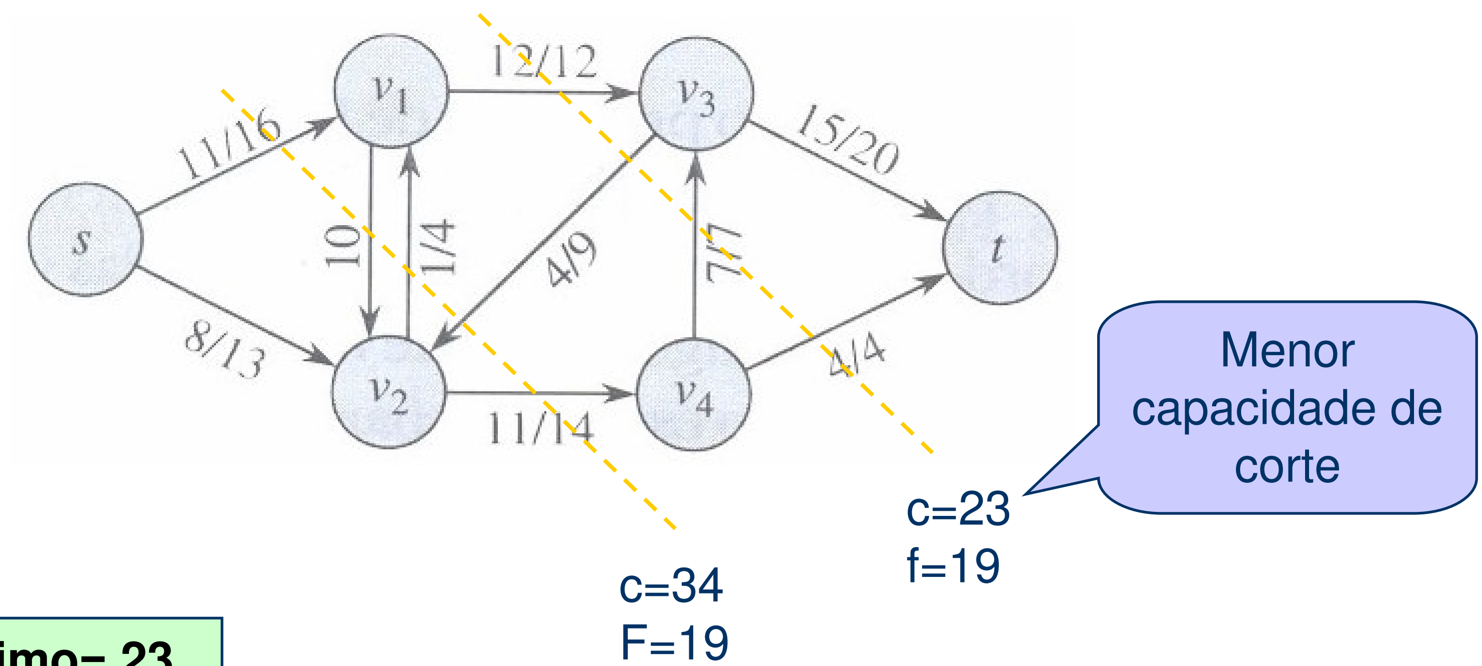
Cortes de fluxo - exemplo



c=35
F=19

c=34
f=19

Cortes de fluxo - exemplo



Fluxo Máximo= 23

O fluxo máximo é igual ao valor da menor capacidade de corte entre todos os cortes possíveis da rede.

Vamos exercitar...

Acessar o link e rodar o applet java:

http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/maxflow/MaxflowApp.shtml?demo1

Download do código c:

http://paginas.ucpel.tche.br/~rsouza/arquivos/fx_max_ff.c

Comparar resultados obtidos

Referências

Livro base:
CORMEN, T. H. et al. *Algoritmos: teoria e prática.* Rio de Janeiro: Campus, 2002

http://descartes.ucpel.tche.br/WFC/2002/apa_grupo6-FluxoMaximo.pdf

http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/maxflow/MaxflowApp.shtml?demo1

http://students.odl.qmul.ac.uk/aduni/05_algorithms/handouts/Reciation_09.html